

# XI. Ueber die Bedingungen des Aplanatismus der Linsensysteme

Hierzu Tafel II.

Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft, Jahrgang 1879, 129-1421, Sitzung vom 28. November 1879.

Nach dem allgemein angenommenen Sprachgebrauch der Optik bezeichnet das Attribut „aplanatisch“ ein Linsensystem, welches wenigstens von Einem Punkt der Achse aus Strahlenkegel von endlichem d. h. beliebig grossem Oeffnungswinkel in dem conjugirten Punkt der Achse zu homocentrischer Vereinigung bringt; [130] — wie die übliche Wendung „conjugirte aplanatische Punkte“ genügend erkennen lässt. Der bisherigen Definition nach deckt sich also der Begriff „aplanatisch“ vollständig mit „Aufhebung der sphärischen Aberration für ein Paar conjugirter Punkte der Achse“; die thatsächliche Anwendung dagegen legt in den Begriff wesentlich mehr hinein, als jene Definition zum Ausdruck bringt und rechtfertigt. Denn er wird überall gebraucht — und dieses allein verleiht ihm eine praktische Bedeutung — um die Fähigkeit eines Linsensystems zu bezeichnen, von einem Object durch Strahlenkegel von endlichem Divergenzwinkel ein deutliches Bild zu entwerfen. Unter „Object“ wird dabei aber stets nicht ein Punkt der Achse, sondern ein senkrecht zur Achse ausgedehntes Flächenelement verstanden und vorausgesetzt.

Mit der Correction der sphärischen Abweichung in einem Achsenpunkt würde aber die deutliche Abbildung einer, wenn auch noch so kleinen, Fläche augenscheinlich nur dann gegeben sein, wenn durch diese Correction Aberrationen ausser der Achse <213> von selbst und wenigstens in so weit ausgeschlossen würden, als sie Undeutlichkeitskreise von gleicher Grössenordnung mit den Dimensionen des abzubildenden Flächenelements hervorzubringen vermögen. Diese Voraussetzung — die in der That wohl meist stillschweigend gemacht wird — ist aber nicht nur nicht selbst verständlich, sondern im Gegentheil durchaus unzulässig. Denn wenn die Bedingungen einer Abbildung mit grossen Divergenzwinkeln genau analysirt werden, so zeigt sich, dass bei voll kommenster Aufhebung der sphärischen Aberration auf der Achse die verschiedenen Theile der freien Oeffnung eines Linsensystems Bilder von ungleicher Linearvergrößerung ergeben können und, wenn keine weitere Voraussetzung gemacht wird, im Allgemeinen auch immer ergeben: dasjenige Bild eines axialen Flächenelements, welches durch zur Achse geneigte Strahlenbündel (durch irgend einen excentrischen Theil der Oeffnung) entworfen wird, zeigt eine andere lineare Vergrößerung als dasjenige Bild, welches gleichzeitig durch die Strahlen nahe der Achse (durch das centrale Element der Oeffnung) entsteht; und in den Bildern der ersteren Art kann zugleich die lineare Vergrößerung nach verschiedenen Meridianen in beliebigem Grade verschieden sein. Bei beträchtlichem Oeffnungswinkel der abbildenden

---

1 [Im 1. Band der gesammelten Abhandlungen (Ausgabe von 1906) sind offenbar die Seitenwechsel der Originalpublikation in eckigen Klammern wiedergegeben. In dieser Textdatei ist zusätzlich der Seitenumbruch der gesammelten Abhandlungen in der Form <Seite> (als Text mit dem Formatvorlagen-Zeichenformat „verborgen (Seitennummer)“) jeweils nach dem letzten vollständigen Wort einer Seite dargestellt. Dabei handelt es sich um die Nummer der Seite, auf der das Wort steht, nicht der Seite die kurz danach beginnt. Bei den Seitennummern der Originalpublikationen scheint es genau anders zu sein, wie eine Plausibilitätsprüfung zeigt. — Die Fußnoten sind hier neu durchnummeriert. A.H.]

Strahlenkegel können aber diese inneren Vergrößerungsdifferenzen beliebig gross werden, z. B. 50 und mehr Procent des Hauptwerthes der Vergrößerung erreichen. Nun erscheint aber jedenfalls das durch [131] Vermittelung weit geöffneter Strahlen kegel erzeugte Bild als Resultat einer Superposition der unendlich vielen partiellen Bilder, welche die verschiedenen Flächenelemente der freien Oeffnung einzeln erzeugen würden, wie diese denn auch thatsächlich — durch Anwendung enger Diaphragmen — isolirt dargestellt werden können. Ist die lineare Vergrößerung dieser partiellen Bilder verschieden, so mögen dieselben, bei vollkommener Correction der sphärischen Abweichung, wohl im Achsenpunkt der Bildfläche coincidiren; sie müssen aber mit zunehmendem Abstand von der Achse proportional diesem Abstand weiter und weiter aus einander fallen. Das Bild eines dicht neben der Achse liegenden Objectpunktes wird demnach aufgelöst in einen Undeutlichkeitskreis, dessen Durchmesser ein endliches — und unter Umständen beträchtliches — Verhältniss zu seiner Entfernung von der Achse, also zu den Dimensionen des abgebildeten Flächenstückes, wie klein dieses auch sein möge, erhält; <214> womit denn die Voraussetzung einer Abbildung, in dem Sinne, in welchem das Wort allein eine Bedeutung hat, augenscheinlich aufgehoben ist.

Soll die im bisherigen Sprachgebrauch dem Attribut „aplanatisch“ beigelegte Beziehung auf die Fähigkeit optischer Systeme zur Erzeugung wirklicher Bilder zu Recht bestehen, so muss demnach die Definition des Aplanatismus eine wesentliche Ergänzung erfahren. Ein System darf nur dann als aplanatisch bezeichnet werden, wenn neben der Aufhebung der sphärischen Aberration für ein Paar conjugirter Punkte noch der weiteren Forderung übereinstimmender Vergrößerung durch alle Theile der freien Oeffnung (oder für alle Strahlenrichtungen in den Grenzen des Oeffnungswinkels) genügt ist. Erst durch diese zweite Bedingung werden alle Aberrationen ausgeschlossen, welche nicht von höherer Grössenordnung als die Maasse des abzubildenden Flächenelements sind, und die Abbildung eines solchen durch Strahlenkegel von endlicher Divergenz möglich gemacht.

Durch eine rein geometrische Analyse lässt sich zeigen, dass die geforderte Identität der Vergrößerung durch verschiedene Theile der freien Oeffnung dann und nur dann besteht, wenn innerhalb der beiden conjugirten Strahlenbüschel, welche in den Achsenpunkten von Object und Bild ihr Centrum haben, ein ganz bestimmtes Verhältniss der Convergenz statt hat: es müssen die Sinus der Neigungswinkel beiderseits entsprechender Strahlen gegen die Achse im ganzen Umfang bei der Büschel ein constantes Verhältniss zeigen. Durch diese Eigenschaft treten aplanatische Punkte [132] in Gegensatz zu einer zweiten Art von charakteristischen Punkten, welche für die Abbildung mit Strahlen von endlichen Neigungswinkeln Bedeutung gewinnen, nämlich zu solchen Punkten der Achse, in denen die Tangenten der Neigungswinkel conjugirter Strahlen in constantem Verhältniss stehen — welche man füglich als orthoskopische Punkte bezeichnen kann, da von ihrem Vorhandensein die Möglichkeit winkelgetreuer oder ähnlicher Abbildung ausgedehnter Objecte abhängt.

Nach dem Gesagten ist jenes bestimmte Convergenzverhältniss der in zwei conjugirten Punkten der Achse zusammentreffenden Strahlenkegel die nothwendige und zureichende Bedingung dafür, dass diese Punkte aplanatische Punkte des Systems sind, wofern zugleich die sphärische Abweichung in ihnen gehoben ist. Auf <215> ihren kürzesten Ausdruck gebracht lautet demnach die vollständige Definition des Aplanatismus:

Aplanatische Punkte eines Linsensystems sind conjugirte Punkte der Achse, in welchen die sphärische Aberration eines Strahlenkegels von endlichem Oeffnungswinkel gehoben und zu gleich Proportionalität der Sinus der Neigungswinkel conjugirter Strahlen herbeigeführt ist.

Für die Theorie der optischen Instrumente und namentlich auch für die praktische Optik ist es eine Sache von erheblicher Tragweite, dass die Einschränkungen, welche dem Begriff in der hier begründeten Fassung anhaften, wesentliche Voraussetzungen desselben ausmachen — nämlich sowohl seine Beziehung auf einzelne Punkte der Achse wie auch die Beziehung auf die Abbildung eines als unendlich klein gedachten Flächen-Elements. Es könnte zwar scheinen, als ob eine nach der einen oder der anderen Richtung hin umfassendere Art von Aplanatismus möglich sein müsste, bei welcher die betreffende Eigenschaft entweder einem optischen System schlecht hin zukömmt, nicht nur vereinzelt Paaren conjugirter Punkte, oder bei welcher sie die homocentrische Abbildung von Objecten in endlicher Flächenausdehnung ausspricht; es lässt sich jedoch beweisen — und zwar ganz allgemein für jede Art von Systemen und für jede Gestalt der spiegelnden oder brechenden Flächen — dass kein Aplanatismus solcher Art verwirklicht werden kann: dass nämlich erstens kein optisches System für eine kontinuierliche Folge von Punkten aplanatisch sein kann, und zweitens, dass durch optische Mittel keine dem Object ähnliche Abbildung möglich ist, bei welcher eine ebene Fläche von endlicher Ausdehnung correct wiedergegeben würde [134] durch Strahlenkegel, welche in demselben Räume endlichen Divergenzwinkel besitzen, es sei denn, dass die Vergrößerungsziffer gleich der Einheit bleibe.

Einen dem oben aufgestellten im Wesentlichen gleichwerthigen Satz über das Convergenzverhältniss bei aplanatischen Systemen habe ich, unter Hinweis auf seine principielle Bedeutung in einer 1873 erschienenen Abhandlung „Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung“ aus gesprochen<sup>2</sup>. Er hat sich mir in dem oben angedeuteten Zusammenhang ergeben als die Bedingung für Identität der <216> Vergrößerung durch verschiedene Theile der Oeffnung eines Linsensystems. Fast gleichzeitig hat Hr. HELMHOLTZ — „Ueber die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Mikroskope“<sup>3</sup> — das in Rede stehende Theorem aufgestellt und hat das selbe von einem Gesichtspunkte aus bewiesen, der geeignet ist, ihm eine über das dioptrische Interesse hinausgehende allgemeinere Bedeutung zu verleihen. Der Beweis von HELMHOLTZ ergibt die Proportionalität der Sinus als die Bedingung dafür, dass die vom Object ausgehende Lichtmenge durch das abbildende System ohne Gewinn oder Verlust dem Bilde zugeführt werde. Da im Sinne der Undulationstheorie Lichtmenge das Ergal einer oscillatorischen Bewegung bedeutet, so setzt diese Ableitung des obigen Theorems die Wirkungsweise optischer Apparate in unmittelbarem Zusammenhang mit dem allgemeinen Princip der neueren Physik. — Bemerkenswerth ist dabei, dass auch diese von ganz anderen Gesichtspunkten geleitete Deduction den entscheidenden Punkt meiner dioptrischen Betrachtungsweise gleichfalls als wesentliche Voraussetzung zur Geltung bringt: dass nämlich ein optisches Bild nur in so weit existirt, als ein Flächenelement abgebildet wird unter Ausschluss von Aberrationen von gleicher Grössenordnung mit den Dimensionen desselben.

---

<sup>2</sup> Max Schultze's Archiv f. mikrosk. Anatomie, Bd. 9, S. 420, [vergl. S. 52]

<sup>3</sup> Pogg. Annalen, Jubelband [1874]. S. 566. [Vergl. S. 134.]

Die oben ausgesprochene allgemeine Eigenschaft aplanatischer Systeme ist hiernach dem Wesen nach nichts Neues mehr. Immerhin dürfte es nicht als überflüssig erscheinen, ihre Bedeutung für die richtige Bestimmung eines fundamentalen Begriffs der Dioptrik einmal ausdrücklich ans Licht gesetzt zu haben. Im Anschluss hieran mag denn auch noch kurz bemerkt sein, in welcher Art die hier betrachtete zweite Bedingung des Aplanatismus in der Wirkungsweise optischer Apparate praktisch zur Geltung kommt.

[134] Ein Rest sphärischer Aberration in dem axialen Strahlenkegel hat zur Folge, dass in der dem Object conjugirten Ebene an Stelle scharfer Bildpunkte Zerstreuungskreise von bestimmtem Durchmesser auftreten. So lange Anomalien der Vergrößerung ausgeschlossen sind, muss Gestalt und Grösse der Zerstreuungsfigur auf und neben der Achse übereinstimmend sein, abgesehen von Unterschieden, welche dem Quadrate und höheren Potenzen des Abstandes proportional gehen, wie solche aus der allmählichen Veränderung des für die Achse geltenden Aberrationscoefficienten, aus  $\langle 217 \rangle$  dem allmählich eintretenden Astigmatismus der Strahlenbündel und aus der Wölbung der Bildfläche sich ergeben. Für sich würde also die sphärische Aberration auf der Achse bei der Abbildung eines kleinen Flächenelements eine ganz gleichmässige Undeutlichkeit des Bildes zur Folge haben. Dem gegenüber äussert sich ein Convergenzfehler, gemäss der aus ihm entspringenden Vergrößerungsanomalien, durch eigenthümliche Aberrationen ausserhalb der Achse, welche einen wesentlich anderen Charakter zeigen als die sphärischen Abweichungen im engeren Sinne. Jeder bestimmten Deviation des Quotienten der Sinus conjugirter Winkel in dem axialen Strahlenbündel-Paar von der Constanten (nämlich von dem Product aus der normalen Vergrößerungsziffer des Bildes mit dem relativen Brechungsexponenten vom Bildraum zum Objectraum) entspricht eine bestimmte Abweichung der linearen Vergrößerung durch irgend ein excentrisches Element der Oeffnung von der normalen Vergrößerung durch das centrale Element der selben; und zwar wechselt diese Abweichung nach einem allgemeingiltigen, von der Construction des Systems unabhängigen Gesetz von Meridian zu Meridian. Diese Anomalien lassen das Bild auf der Achse selbstverständlich ganz unberührt, mag dasselbe ein scharfer Punkt oder ein Zerstreuungskreis sein. Der von einem neben der Achse liegenden Objectpunkt ausgehende Strahlenkegel dagegen wird durch sie in einen anacentrischen Bündel verwandelt, dessen Durchschnitt in der Bildebene eine elliptische Fläche darstellt. Die Dimensionen dieser Ellipse wachsen aber von der Achse aus mit der ersten Potenz des Abstandes. Wenn nun das vom Quadrat und höheren Potenzen der Oeffnung abhängige veränderliche Glied in dem betrachteten Convergenz-Quotienten einen merklichen Werth erlangt, so muss — mag die sphärische Aberration vollkommen gehoben sein oder nicht — eine rasch zunehmende Undeutlichkeit des Bildes ausserhalb der Achse eintreten.

[135] Der Natur der Sache nach kann ein Anwachsen des Convergenzfehlers und der ihm folgenden Vergrößerungsanomalien zu bedeutendem Betrage nicht leicht eintreten, so lange nur geringe Convergenzwinkel in Betracht kommen. Denn welches auch das spezifische Convergenzverhältniss sein möchte, in den Grenzen kleiner Winkel wird es sich niemals von der Constanz des Sinus-Quotienten bedeutend entfernen können. Bei solchen optischen Systemen, die — wie z. B. das Fernrohrobjectiv — nur mit geringen Oeffnungswinkeln in Anspruch genommen werden, bleibt deshalb  $\langle 218 \rangle$  die zweite Bedingung des Aplanatismus praktisch von untergeordneter Bedeutung gegenüber der Correction der sphärischen Abweichung der Achsenstrahlen, wenigstens so lange, als das Bild nur in geringer Ausdehnung um die Achse herum benutzt zu werden

braucht<sup>4</sup>. Ganz anders stellt sich das Verhältniss im Falle von Systemen, welche mit sehr weit geöffneten Strahlenkegeln wirksam sein sollen, wie solche vor allem am Mikroskop im Gebrauche sind. Hier handelt es sich um Divergenzwinkel der abbildenden Strahlenbündel, welche schon bei sog. Trockenobjectiven zum Theil der Halbkugel nahe kommen und bei [136] manchen der in neuerer Zeit construirten Immersionsobjective nicht einmal mehr im Luftraum, sondern nur in einem Medium von höherem Brechungsindex verwirklicht werden können. Bei solchen Linsensystemen gehört die Herstellung des richtigen Convergenzverhältnisses in möglichster Annäherung zu den wesentlichsten Bedingungen der Brauchbarkeit, und die genügende Erfüllung dieser Anforderung ist thatsächlich der schwierigste Punkt in der Construction guter Objective mit den erwähnten grossen Oeffnungswinkeln. Denn schon eine geringe Veränderlichkeit des Sinus-Quotienten eröffnet den Vergrösserungs-Anomalien so weiten Spielraum, dass dicht neben der Achse die deutliche Abbildung völlig aufhört, selbst wenn in der Mitte des Feldes die beste Strahlenvereinigung erreicht ist. <219>

Wenn ein derartiges Objectiv mit einem durch die ganze Oeffnung fortschreitenden Convergenzfehler mit merklichen Coefficienten behaftet ist, verschwinden diesem gegenüber alle sonstigen aus den gewöhnlichen Aberrationen, der Wölbung des Feldes und anderen Ursachen herrührenden Defecte; das Bild eines ebenen Objectes erscheint alsdann nicht wie das einer stark gewölbten Fläche, sondern vielmehr wie das Bild einer von der Achse aus gesehenen Kegelspitze.

Weder die Theorie noch die empirische Praxis vermag bei sehr grossen Oeffnungswinkeln die zweite Bedingung des Aplanatismus so genau zu erfüllen, dass nicht auch bei den besten Constructionen dieser Art noch sehr deutliche Spuren des Divergenzfehlers im Bilde übrig blieben. Die Mikroskopiker haben die Unvollkommenheit dieser Art mit dem sehr unzutreffenden Namen „Wölbung“ oder „Unebenheit des Sehfeldes“ belegt, unter welcher Benennung sie allgemein bekannt sind. Es lässt sich aber experimentell sehr leicht nachweisen, dass die hierunter verstandenen Abbildungsfehler ihrem dominirenden Betrage nach nicht mit der zweiten, sondern mit der ersten Potenz des Abstandes von der Achse anwachsen, demnach in der Hauptsache mit einer wirklichen Wölbung der Bildfläche nichts zu thun haben können.

Im Folgenden soll nun noch ein einfaches Experiment beschrieben werden, durch welches das charakteristische Convergenzverhältniss der Strahlen in aplanatischen Punkten beobachtet und

---

4 Das achromatische Doppelobjectiv, wie es seit DOLLOND die Basis aller optischen Constructionen bildet, bietet übrigens in den vier verfügbaren Krümmungen gerade so viel disponible Elemente dar, als erforderlich und zureichend sind, um neben der Farbendifferenz des Brennpunktes und der sphärischen Aberration auf der Achse auch noch den Convergenzfehler in seinem ersten Gliede zu heben und also in den Grenzen mässiger Oeffnung vollständigen Aplanatismus zu verwirklichen. — Es ist von Interesse, zu constatiren, dass das FRAUNHOFER'sche Objectiv, so wie es durch die Elemente des Königsberger Helio meters gekennzeichnet ist, dieses Ideal eines zwei gliedrigen Systems in aller Vollkommenheit darstellt. Sein Convergenzfehler ist fast gleich Null, nämlich von gleicher Ordnung mit dem Rest der sphärischen Aberration im Brennpunkt. Es erklärt sich dieses sehr einfach, weil verständigerweise doch nicht bezweifelt werden kann, dass FRAUNHOFER — zumal bei einem Objectiv, dessen Bild in ungewöhnlich grosser Ausdehnung zu Messungen benutzt werden sollte — jedenfalls die möglichste Einschränkung der Undeutlichkeitskreise ausser der Achse als dritte Bedingung eingeführt haben wird, woraus eine grosse Annäherung an das richtige Convergenzverhältniss von selbst folgen musste. Uebrigens ist natürlich die möglichste Verminderung der Undeutlichkeit in einem bestimmten endlichen Abstand von der Achse wegen der hinzutretenden Aberrationen höherer Ordnung nicht immer an das völlige Verschwinden des Convergenzfehlers, sondern unter Umständen an das Bestehen eines gewissen kleinen Restes des selben geknüpft.

die Allgemeinheit seines Bestandes in eclatanter Weise constatirt werden kann. Dieses Experiment gründet sich auf den Gegensatz zwischen den aplanatischen Punkten und den zuvor erwähnten orthoskopischen Punkten der Linsensysteme und ergibt sich aus folgender Betrachtung:

[137] Wenn durch irgend ein optisches System von einem aus gedehnten ebenen Object ein richtig gezeichnetes d. h. ähnliches Bild entworfen werden soll, so müssen die von den Objectpunkten ausgehenden, in einem Punkte der Achse sich kreuzenden Hauptstrahlen und die entsprechenden im conjugirten Punkte der Achse sich kreuzenden, nach den Bildpunkten hinzielen. Die Hauptstrahlen der abbildenden Strahlenbüschel in den Tangenten ihrer Neigungswinkel ein constantes Verhältniss zeigen. Nur dann, wenn ein Linsensystem für ein Paar conjugirter Punkte der Achse dieser Bedingung genügt (wie z. B. ein richtig construirtes Ocular für den Ort der Objectivöffnung und den ihm conjugirten Augenpunkt <220> thun soll), ist es orthoskopisch, d. h. vermag es winkelgetreue, verzerrungsfreie Bilder auch dann zu entwerfen, wenn das Object, oder das Bild, oder beide unter endlicher Winkelausdehnung sich darstellen. Da nun aplanatische Punkte, kraft der Bedingung des Aplanatismus, diesem Merkmal orthoskopischer Punkte widersprechen, so muss ein aplanatisches System eine dem ihm eigen tümlichen

Convergenzverhältniss gemäss vor auszubestimmende Verzerrung des Bildes ergeben, sobald es eine von dem aplanatischen Punkt entfernte Ebene durch Strahlenkegel abbildet, deren Hauptstrahlen in diesem aplanatischen Punkt sich kreuzen. Die specifische Art der zu erwartenden Unähnlichkeit oder Verzerrung lässt sich aber genügend kennzeichnen, indem man die Umgestaltung bestimmt, die ein System paralleler gerader Linien bei der Abbildung erleidet, oder indem man umgekehrt die Gestalt derjenigen Curven aufsucht, welche im Bilde als parallele Gerade sich darstellen müssen.

Auf die hier vorliegenden Voraussetzungen angewandt ergibt eine leicht auszuführende Rechnung das Resultat: irgend eine Schaar paralleler Geraden in einer zur optischen Achse senkrechten Ebene bildet sich durch ein aplanatisches System als eine Schaar von Ellipsen über derselben Hauptachse, aber mit verschiedenen Nebenachsen ab (die unendlich entfernte Gerade als einschliessender Halbkreis), und eine bestimmte — unten näher zu bezeichnende — Schaar von Hyperbeln mit gleichem Mittelpunkte und gleicher Nebenachse, aber verschieden grossen Hauptachsen wird im Bilde als ein System von parallelen Geraden wiedergegeben. Dabei ist vorausgesetzt, dass die abbildenden Strahlenkegel beim Eintritt in das optische System sich in dem aplanatischen Punkt auf der Objectseite kreuzen, und ausserdem ist, zur Vereinfachung, noch angenommen, dass der Convergenzwinkel der [138] Strahlen im conjugirten aplanatischen Punkt auf der Bildseite als verschwindend klein angesehen, auf dieser Seite also der Sinus der Tangente gleich gesetzt werden könne.

Zur experimentellen Erprobung dieser Folgerungen sind be greiflicher Weise nur solche Linsensysteme geeignet, welche mit weit geöffneten Strahlenkegeln abbilden. Wo der Divergenzwinkel der Strahlen auf wenige Grade beschränkt ist, wie z. B. beim Fernrohrobjectiv, entzieht sich das Convergenzverhältniss der Prüfung auf diesem Wege, weil, welches auch sein specifischer Charakter sein möchte, bei kleinen Winkeln eine bemerkbare Abweichung <221> von der Proportionalität der Tangenten keinesfalls vorkommen kann. Spielraum für mögliche grosse Verschiedenheiten in der Art der Strahlen-Convergenz bieten dagegen die an den Mikroskopen gebrauchten Linsensysteme, zumal die Objective mit den ausnehmend grossen Oeffnungswinkeln, von denen oben die Rede war. Bei Linsensystemen dieser Art müssen daher die erwähnten Erscheinungen anorthoskopischer Abbildung augenfällig sichtbar werden, sobald geeignete Figuren in einer vom aplanatischen Focus beliebig entfernten Objectebene beobachtet werden und dabei Kreuzung der abbildenden Strahlenkegel in diesem Focus herbeigeführt wird. Letztere

Forderung ist ohne alle Umstände dadurch zu erfüllen, dass bei der Beobachtung die Pupille des beobachtenden Auges — oder die sonst den Strahlzutritt zum Auge vermittelnde Oeffnung — in die Achse des Systems und zwar an den Ort des conjugirten aplanatischen Focus auf der Bildseite gebracht wird; weil in diesem Falle kein Strahl zum Auge gelangen kann, der nicht beim Eintritt in das System das der Pupille — oder der sonst wirksamen Oeffnung — conjugirte Flächenelement auf der Achse passiert hat. Die oben bemerkte besondere Voraussetzung über die Convergenzwinkel im aplanatischen Punkte auf der Bildseite ist aber bei Mikroskopobjectiven augenscheinlich immer in genügender Annäherung erfüllt.

Die für das Gesetz des Aplanatismus am meisten charakteristische Erscheinung erhält man, wenn als Objectfigur zwei Schaaren von Hyperbeln mit gemeinsamen Mittelpunkten und senkrecht sich schneidenden Hauptachsen genommen werden, beide entworfen nach der Gleichung

wo  $\Delta$  — die gemeinsame Nebenachse in beiden Schaaren — den Abstand der Objectebene von dem betreffenden aplanatischen [139] Focus darstellt; und wenn zugleich die Werthe von  $a$  in beiden Schaaren nach der Formel

gleichen Zunahmen des  $u$  entsprechend — z. B. für die Betrag  $u = 0 \dots 0,2 \dots 0,4 \dots 0,6 \dots 0,8$  gewählt werden<sup>5</sup>. Diese Figur <222> ergibt, nachdem der gemeinsame Mittelpunkt aller Curven in die Achse die Ebene senkrecht zur Achse und in den richtigen Abstand  $\Delta$  vom aplanatischen Focus gebracht ist, als Bild zwei Schaaren von äquidistanten Parallelen, die sich rechtwinklig schneiden Die krummlinig begrenzten, nach aussen hin immer weiter sich ausdehnenden und immer stärker deformirenden Felder der Objectfigur stellen sich demnach im Bilde sämmtlich als congruente quadratische Felder dar; die Kreuzung der Hyperbeln, die nach aussen hin unter immer spitzer und stumpfer werdenden Winkeln erfolgt, wird allenthalben als eine rechtwinklige Kreuzung wieder gegeben; und auch die entfernteren Curven beider Hyperbelsysteme, deren Aeste in der Figur überhaupt keinen Durchschnitt ergeben, vielmehr sichtlich divergent verlaufen (z. B. die beiden für  $u = 0,8$ ), erscheinen im Bild unter rechtwinkliger Kreuzung, ihr Durchschnittspunkt aber freilich — entsprechend dem mathematisch Imaginären — in einem Abstand von der Mitte des Bildes, zu welchem kein vom Luftraum ausgehender Lichtstrahl mehr gelangen kann (ausser halb desjenigen Kreises in der Bildfläche,

---

5 Die Figur wird zweckmässig in zwei an einander stossenden Quadranten construiert, welche zusammen ein genügendes Stück der Halbebene repräsentiren, in einer Ausdehnung von wenigstens  $4 \Delta$  in der Breite und  $8 \Delta$  in der Länge.  $\Delta = 25$  bis  $50$  mm giebt angemessene Dimensionen. Damit die geraden Linien im Bilde eine gewisse und überall gleiche Stärke erhalten, stellt man die Curven am besten dar als schwarze Streifen zwischen je zwei Hyperbeln, welche man mit Werthen von  $a$  construiert, denen immer derselbe Unterschied in  $u$  (also etwa  $u = 0,19$  und  $0,21$ ;  $0,39$  und  $0,41$  u. s. f. entspricht. Die Zeichnung der Tafel II ist in dieser Art entworfen für eine Distanz  $\Delta = 25$  mm.

Wenn eine Zeichnung dieser Art gut geebnet auf ein Stück Pappe oder Furnierbrett gezogen und mit diesen auf den Tisch eines Mikroskopes befestigt so braucht man nur den Mittelpunkt, der Curven in die Achse zu rücken und den Tubus mit dem zu erprobenden Objectiv so weit zu heben, dass der Einstellungspunkt, des letzteren den richtigen Abstand  $\Delta$  erhält, um alles zur Beobachtung bereit zu haben.

welcher der Grenze eines Strahlenkegels von 180 Grad im Luftraum entspricht).

[140] Mit Objectiven von nicht allzukurzer Brennweite — bis zu etwa 3 mm herab — lässt sich die beschriebene Erscheinung hinreichend deutlich mit bloßem Auge beobachten, indem man nach Entfernung des Oculars aus dem Tubus des Mikroskops vom offenen Ende aus — das Auge möglichst central gehalten und annähernd an die Stelle gebracht, wo beim gewöhnlichen Gebrauch des Objectivs das reelle Bild entstehen würde — auf das über dem Objectiv schwebende Luftbildchen herabsieht. Bei Objectiven mit sehr kurzer Brennweite, welche dieses Bildchen zu klein werden <223> lassen, muss man zur Beobachtung ein schwach vergrößerndes Hilfsmikroskop benutzen, welches in den Haupttubus eingeschoben und auf das Bild eingestellt wird — eine Einrichtung, welche für vielerlei mikrographische Zwecke, z. B. bei Messung der Oeffnungswinkel und Brennweiten von Objectiven, nützliche Dienste leistet. Es muss dabei allerdings darauf Bedacht genommen werden, dass eine den Strahlengang begrenzende Blendung in diesem Hilfsmikroskop wenigstens annähernd an einer solchen Stelle sich befindet, an welcher ihr Ort dem aplanatischen Focus des zu beobachtenden Objectivs conjugirt ist. — Bei dieser Beobachtungsweise stellt das ganze optische System vor dem Auge des Beobachters augenscheinlich ein Fernrohr mit terrestri schem Ocular dar, durch welches die als Object dienende Zeichnung mit allen sie umgebenden Gegenständen betrachtet wird. Das zu prüfende Mikroskop-Objectiv fungirt dabei als Fernrohr objectiv; sein Oeffnungswinkel ergibt das angulare Sehfeld des Fernrohrs, und das beim gewöhnlichen mikroskopischen Gebrauch des Objectivs als Objectfeld dienende Flächenelement in seinem aplanatischen Focus spielt die Rolle der Eintrittsöffnung bei diesem teleskopischen Gebrauch.

Eine auf diesem Wege ausgeführte Prüfung der verschiedenartigsten in den Händen der Mikroskopiker befindlichen Mikroskop-Objective ergibt — wie ich durch zahlreiche Proben constatirt habe — das bemerkenswerthe Resultat, dass alle solche Linsensysteme, welchen Ursprungs sie auch sein und wie verschieden ihre sonstigen Eigenschaften sich zeigen mögen, ganz übereinstimmend die der Theorie entsprechende anorthoskopische Abbildungserscheinung darbieten, demnach ganz übereinstimmend das oben angeführte spezifische Convergenz-Verhältnis aplanatischer Punkte an den Tag legen, obschon die Grösse der bei diesen Systemen vorkommenden Oeffnungswinkel den allermannigfaltigsten Abweichungen reichlichen Spielraum offen liesse. Die zu beobachten den [141] Abweichungen beschränken sich überall auf ganz unbedeutende, kaum bemerkbare Irregularitäten, welche die Bilder der entfernten und stark gekrümmten Hyperbeln der oben beschriebenen Probefigur gelegentlich zeigen. Nun existirt aber bis jetzt schwerlich ein Mikroskop-Objectiv ausser den hier in Jena in der Zeiss'schen Werksatt angefertigten, bei dessen Construction der Verfertiger in bewusster Weise die in Rede stehende zweite Bedingung des Aplanatismus zur Richtschnur genommen hat. Wenn trotzdem die Objective aller Optiker auf dem Continent, in England <224> und in Amerika dieser Bedingung genügen, so beweist dieses Factum überzeugender als alle Theorie vermöchte, dass die fragliche Art der Strahlenconvergenz einen unbedingt wesentlichen Bestandtheil der Aplanatismus eines Linsensystems ausmacht, einen so unentbehrlichen, dass sobald erhebliche Oeffnungswinkel in Verwendung kommen, der praktische Gebrauch alle Constructionen von selbst als unbrauchbar verwerfen muss, welche die von der Theorie geforderte Eigenschaft nicht wenigstens in annähernder Vollkommenheit erlangt haben. — Was oben über die praktischen Folgen eines fehlerhaften Convergenzverhältnisses gesagt ist, bezeichnet den Weg, auf welchem die Praxis bei dieser Art von Constructionen zur unbewussten Realisirung eines richtigen Aplanatismus geführt worden ist, längst bevor die Theorie dessen Bedingungen erschöpfend gekannt hat. Ein Objectiv mit merklichem Convergenzfehler musste, in der Ausdruckweise der Mikroskopiker zu reden, stets mit einer so groben „Wölbung des



Sehfeldes" behaftet erscheinen, nämlich ausserhalb der Achse so schlechte Bilder ergeben, dass Niemand es hätte gebrauchen mögen. Indem also die Optiker sich bemühen mussten, trotz immer fortschreitender Vergrösserung der zur Anwendung kommenden Oeffnungswinkel möglichst „flaches Feld" zu erhalten, ergab sich eine weitgehende Anpassung der Constructionen an die theoretischen Erfordernisse des vollkommenen Aplanatismus als ungesuchte Folge.

Das im Vorstehenden beschriebene Experiment ist übrigens in mehreren Beziehungen lehrreich, indem es noch andere theoretische Schlussfolgerungen in Bezug auf die Abbildung durch Strahlenkegel mit grossem Divergenzwinkel, namentlich auch in Bezug auf die Functionen des Oeffnungswinkels beim mikroskopischen Sehen, praktisch illustriert. Hier sei nur noch auf den einen Punkt kurz hingewiesen: dass die Beobachtung der hyperbolischen Figuren deutliche Winke für eine sachgemässe Schätzung der Oeffnungswinkel bei Linsensystemen für mikroskopischen Gebrauch ergibt. [142] — Die äusserst ungleichen Felder zwischen den hyperbolischen Curven, deren Areal nach aussen hin auf ein ansehnliches Vielfaches vom Areal der innersten Felder steigt, werden sämmtlich als gleich grosse Quadrate abgebildet, und diese lassen, wenn die Probenfigur gleichmässig beleuchtet ist, keinerlei Unterschiede der Helligkeit erkennen, obschon in den Quadraten am Rand die Strahlenmenge zusammengedrängt ist, welche von einer vielfach grösseren leuchtenden Fläche, als den mittleren Quadraten <225> entspricht, ausgesandt wird. Dieses Factum macht augenfällig die grosse Ungleichwerthigkeit unter den verschiedenen Theilen des den Oeffnungswinkel eines Systems bildenden Kegelraumes, in Bezug auf ihren Antheil an der Lichtmenge, die dem System zu geführt wird. Es wird dadurch handgreiflich, dass die peripherischen Theile des Oeffnungskegels im Verhältniss zu den centralen Theilen sehr viel weniger Lichtstrahlen in das Objectiv führen, als ihrem angularen Maasse entspricht, und dass demnach der Oeffnungswinkel kein richtiger Ausdruck für die wirkliche Oeffnung — nämlich für die Fähigkeit des optischen Systems zur Lichtaufnahme — sein kann. Diese Erwägung, in naheliegender Weise weiter verfolgt, führt auf empirischem Wege zu demselben Schluss, den auch die Theorie aufstellt: das rationale Maass für die Oeffnung eines optischen Systems, das einzige, aus welchem sich irgend etwas über die Wirkungsweise entnehmen lässt, ist die „numerische Apertur", nämlich der Sinus des halben Oeffnungswinkels, so weit es sich nur um Abbildungen vom Luftraum aus handelt, — und das Produkt aus diesem Sinus mit dem Brechungsindex des Mediums, auf welches der Winkel Bezug hat, wenn der allgemeinere Fall mitbegriffen sein soll.

[Ein Abdruck- der Abhandlung über die Bedingungen des Aplanatismus findet sich in CARLs Repertorium der Experimental-Physik, XVI, 303—316, 1880.]